ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN—POLONIA
VOL. IX, 9 SECTIO H 1975

Instytut Ekonomii Politycznej i Planowania
Wydział Ekonomiczny UMCS

Michał JARMUŁ

O pewnej własności estymatorów klasycznej metody najmniejszych kwadratów w warunkach heteroscedastyczności składnika losowego

О некотором свойстве оценок классического метода наименьших квадратов в условиях гетероскедастичности случайного компонента

Von einer Eigenschaft der Ästimatoren der klassischen Methode der kleinsten Quadrate bei der Heteroszedastizität des Schicksalselementes

W artykule tym zajęto się stochastycznymi właściwościami klasycznych[1] estymatorów wariancji składnika losowego oraz wariancji oszacowań parametrów strukturalnych prostego modelu ekonometrycznego z jedną zmienną objaśniającą — w wypadku heteroscedastyczności składnika losowego. Wprowadzone zostanie pojęcie *quasi*-nieobciążoności estymatorów, której warunki występowania poszukiwane będą każdorazowo przy szczególnych założeniach dotyczących modelu kształtowania się wariancji składnika losowego.

Niech będzie dany prosty model:

$$y_t = a_0 + a_1 x_t + \varepsilon_t \qquad (t = 1,2,...,n). \tag{1}$$

Przyjmijmy dla tego modelu klasyczne założenia:

a) zmienna x_t jest nielosowa i nie skorelowana ze składnikiem losowym,

b) składnik losowy ε_t ma wartość oczekiwaną, równą zeru oraz stałą wariancje σ^2 i wszystkie autokowariancje równe 0, czyli zachodzi:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad (t = 1,2,...,n), \tag{2a}$$

[1] Za klasyczne estymatory uważane są tu estymatory właściwe klasycznej metodzie najmniejszych kwadratów.

(2b) $$E(\varepsilon_t \varepsilon_s)=\begin{cases}\sigma^2 \text{ dla } t=s \\ 0 \text{ dla } t\neq s\end{cases} \qquad (t,s=1,2,...,n).$$

Przyjmijmy na stałe, że x_t jest odchyleniem od średniej z próby. Stosując klasyczną metodę najmniejszych kwadartów otrzymujemy estymatory parametrów strukturalnych modelu (1):

(3) $$a_0=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t}{n}$$

(4) $$a_1=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t y_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}$$

Przy spełnieniu założeń a) i b) estymatory (3) i (4) są na mocy twierdzenia Gaussa-Markowa najlepszymi nieobciążonymi estymatorami liniowymi parametrów a_0 i a_1.

Wariancje oszacowań (3) i (4) są równe:

(5) $$D^2(a_0)=\frac{\sigma^2}{n}$$

(6) $$D^2(a_1)=\frac{\sigma^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}$$

Nieobciążonymi estymatorami wariancji składnika losowego oraz wariancji (5) i (6) są odpowiednio wyrażenia:

(7) $$s^2=\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2}{n-2}$$

gdzie e_t są to tzw. reszty modelu,

(8) $$S^2a_0=\frac{s^2}{n}$$

(9) $$S^2a_1=\frac{s^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_t^2}$$

Należy zwrócić uwagę, że założenie b) wymaga, aby wariancja składnika losowego była stała, co znaczy, by zachodziło:

$$D^2(\varepsilon_1)=D^2(\varepsilon_2)=...=D^2(\varepsilon_n).$$

Przyjmijmy teraz dla modelu (1) nieco odmiene założenia:
c) zmienna x_t jest nielosowa i nie skorelowana ze składnikiem losowym,
d) składnik ε_t ma wartość oczekiwaną równą 0, wariancję σ^2_t i wszystkie autokowariancje równe 0, czyli zachodzi:

(10a) $$E(\varepsilon_t)=0 \qquad (t=1,2,...,n),$$

(10b) $$E(\varepsilon_t\varepsilon_s)=\begin{cases} 0 \text{ dla } t\neq s \\ \sigma^2_t=\sigma^2\cdot k_t \text{ dla } t=s \end{cases} \qquad (t,s=1,2,...,n),$$

gdzie $k_t>0$ i $\sum_{t=1}^{n} k_t=n$, co oznacza, że współczynnik σ^2 jest wariancją średnią, ponieważ

$$\overline{\sigma^2}=\frac{\sum_{t=1}^{n}\sigma_t^2}{n}=\frac{\sigma^2\sum_{t=1}^{n}k_t}{n}=\sigma^2.$$

Aby założenie d) nie było tożsame z założeniem b), musi zachodzić $k_t\neq 1$ dla dwu przynajmniej różnych t. Przy tych założeniach estymatory (3) i (4) otrzymane za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów są w dalszym ciągu nieobciążone, nie posiadają natomiast własności minimalnej wariancji. Dodatkową komplikacją spowodowaną przez heteroscedastyczność wariancji założoną w d) jest obciążenie estymatorów (7), (8), (9). Wariacje $D^2(a_0)$ i $D^2(a_1)$, gdzie a_0 i a_1 nadal określone są przez (3) i (4), obecnie wynoszą:

(11) $$D^2(a_0)=\frac{\sum_{t=1}^{n}D^2(\upsilon_t)}{n^2}=\frac{\sigma^2\sum_{t=1}^{n}k_t}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$$

(12) $$D^2(a_1)=\frac{\sum_{t=1}^{n}x_t^2D^2(\upsilon^2)}{\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2\right)^2}=\frac{\sigma^2\sum_{t=1}^{n}x_t^2k_t}{\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2\right)^2}$$

natomiast ich oszacowania otrzymane za pomocą estymatorów (8) i (9) są obciążone. Obciążenie to dla estymatora (9) jest równe ([1] str. 310)

$$\frac{\sigma^2(n-1)\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2}{(n-2)\left(\sum_{t=1}^{n}x_t^2\right)^2}$$

Obciążenie estymatora (8) można łatwo znaleźć korzystając z tego, że ([1] str. 309)

$$E(s^2)=\sigma^2\left[1+\frac{\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2}{(n-2)\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\right]$$

Mamy więc

$$\mathrm{E}\left(\frac{s^2}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n}\left[1+\frac{\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2}{(n-2)\sum_{t=1}^{n}x_t^2}\right]$$

Odpowiednie obciążenie równa się zatem

$$\frac{\sigma^2\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2}{n(n-2)\sum_{t=1}^{n}x_t^2}$$

Jest oczywiste, że obciążenia będą równe 0 niezależnie od wartości przyjmowanych przez zmienną x_t, w przypadku gdyby $k_1=k_2=k_3=\ldots=k_n=1$, czyli gdyby zachodziły założenia a) i b). Można jednak wykazać, że przy założeniach c) i d) mogą występować sytuacje, w których wspomniane obciążenia będą równe zeru. Przyjmując dodatkowo model, według którego kształtuje się wariancja składnika losowego, a więc i współczynniki k_t, można poszukiwać takich układów wartości zmiennej objaśniającej x_t, dla których zachodzić będzie

$$\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2=0.$$

Te szczególne przypadki zerowego obciążenia estymatorów (7), (8), (9) modelu (1) przy założeniach e) i d) oraz przyjętym modelu obiektywnej heteroscedastyczności nazywać będziemy dalej *quasi*-nieobciążonością albo nieobciążonością przy pewnych układach wartości zmiennej objaśniającej. Z powyższych powodów niezbędne jest ustalenie dla dalszych rozważań modelu, według którego zmienia się wariancja składnika losowego.

Pawłowski [2] w przypadku estymowania funkcji popytu na dobra trwałego użytku przyjmuje, że wariancja składnika losowego jest funkcją czasu. Jak wykazują badania wielu autorów ([3] str. 256), można często przyjąć, że $D^2(\varepsilon_t)$ jest pewną funkcją bądź wartości oczekiwanej zmiennej objaśnianej, bądź też wartości zmiennej objaśniającej. Jeżeli na przykład estymujemy funkcję regresji wydatków na żywność rodzin względem ich dochodów, to można przyjąć proporcjonalność D^2 (ε_t) do kwadratu dochodu. W tej sprawie pewne ogólniejsze podejście prezentuje E. Park [3]. Proponuje on, aby nie zakładać apriorycznie dokładnego modelu heteroscedastyczności, lecz estymować jego parametry, używając reszt otrzymanych ze wstępnego przeliczenia klasyczną metodą najmniejszych kwadratów jako oszacowania wariancji składnika losowego. Można wtedy na przykład estymować parametry σ^2 i γ modelu

$$e_t^2 = \sigma^2 x_t^{\gamma} e^{v}$$

gdzie v jest składnikiem losowym. Podejście takie — jak widać — dość ostrożne, unika apriorycznych założeń. Podobne sugestie wysuwa Z. Pawłowski [2].

Wydaje się też, że możliwym do przyjęcia w pewnych sytuacjach założeniem jest uznanie wariancji składnika losowego za schodkową funkcję indeksu t. Wiązać się to może z niejednorodnością danych zebranych dla celów estymacji modelu ekonometrycznego. Oczywiście bierzemy tu pod uwagę przypadek, gdy ta niejednorodność generuje zmienność parametru stochastycznego, a nie parametrów strukturalnych estymowanego modelu. Należy się spodziewać, że różne modele obiektywnej heteroscedastyczności, które można przyjąć dla modelu (1), w zależności od jego merytorycznej treści, będą implikowały różne warnuki, jakie musi spełniać zmienna objaśniająca, aby estymatory (7), (8), (9) można było uznać za quasi-nieobciążone.

Niech będzie dalej dany model (1) przy założeniach:

e) zmienna x_t jest nielosowa i nie skorelowana ze składnikiem losowym,

f) składnik losowy ε_t ma wartość oczekiwaną równą 0, wariancję σ_t^2 i wszystkie autokowariancje równe 0, czyli:

$$E(\varepsilon_t) = 0 \qquad (t = 1,2,\ldots,n),$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq s \\ \sigma_t^2 = \sigma^2 k_t & \text{dla } t = s \end{cases} \qquad (t,s = 1,2,\ldots,n),$$

g) $k_t = m \cdot t + b$, gdzie $m \neq 0$ oraz m i b są takie, by

$$\sum_{t=1}^{n} k_t = n$$

Wprowadzenie dodatkowego założenia g) oznacza rozpatrywanie przypadku, gdy wariancja składnika losowego modelu (1) jest liniową funkcją

czasu. Korzystając z tego, że

$$\sum_{t=1}^{n} k_t = n$$

mamy:

$$n = m \sum_{t=1}^{n} t + nb,$$

$$1 = m\,\bar{t} + b, \text{ gdzie } \bar{t} = \frac{\sum_{t=1}^{n} t}{n}$$

Prosta z założenia g) przechodzi więc przez punkt o współrzędnych $(\bar{t}, 1)$, stąd jej równanie przedstawić możemy w postaci:

$$k_t - 1 = m(t - \bar{t}),$$

$$k_t = 1 + m(t - \bar{t}). \tag{14}$$

Esymatory (7), (8), (9) dla modelu (1) przy założeniach: e), f), g) będą *quasi*-nieobciążone, jeżeli zajdzie

$$\sum_{t=1}^{n} (1 - k_t) x_t^2 = 0. \tag{15}$$

Wstawiając (14) do (15) otrzymujemy

$$m \sum_{t=1}^{n} x_t^2 (t - t) = 0. \tag{16}$$

Równość (16) zostanie spełniona, gdy wartości zmiennej objaśniającej będą tworzyły szereg symetryczny. Wówczas wyrażenie

$$\sum_{t=1}^{n} x_t^2 (t - t)$$

gdzie x_t jest odchyleniem od odpowiedniej, będzie równe zeru. Tak więc w modelu (1) przy założeniach: e), f), g) warunkiem *quasi*-nieobciążoności estymatorów (7), (8), (9) jest symetryczność szeregu wartości zmiennej objaśniającej.

Rozważmy teraz inny model heteroscedastyczności.

Niech dla modelu (1) będą prawdziwe założenia:

h) zmienna x_t jest nielosowa i nie skorelowana ze składnikiem losowym,

i) składnik losowy ε_t ma wartość oczekiwaną równą 0, wariancję σ_t^2 i wszystkie autokowariancje równe 0, czyli zachodzi:

$$E(\varepsilon_t)=0 \qquad (t-1,2,...,n),$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s)=\begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq s \\ \sigma_t^2=\sigma^2 k_t & \text{dla } t=s \end{cases} \qquad (t,s=1,2,...,n),$$

j) $k_t=\begin{cases} k_1 & \text{dla } 1 \leq t \leq \frac{n}{2} \\ k_2 & \text{dla } \frac{n}{2} < t \leq n \end{cases}$ $(t=1, 2, \ldots n)$; n jest liczbą parzystą,

oraz $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_1 \neq k_2$, k_1 i k_2 są takie aby $\sum_{t=1}^{n} k_t = n.$

Przyjęcie założenia j) oznacza rozpatrywanie przypadku, w którym wariancja składnika losowego modelu (1) jest różna dla dwu równolicznych grup danych. Korzystając z tego, że $\sum_{t=1}^{n} k_t = n.$ mamy:

$$\frac{n}{2} k_1 + \frac{n}{2} k_2 = n$$

(17)

$$k_1 + k_2 = 2.$$

Estymatory (7), (8), (9), dla modelu (1) przy założeniach: h), i) j) będą *quasi*-nieobciążone, jeżeli zajdzie:

(18)
$$\sum_{t=1}^{n} (1-k_t) x_t^2 = 0.$$

Korzystając z (17) oraz założenia j) przekształcamy (18)

$$\sum_{t=1}^{n}(1-k_t)x_t^2=\sum_{t=1}^{n/2} x_t^2+\sum_{t=n/2+1}^{n} x_t^2-k_1\sum_{t=1}^{n/2} x_t^2-k_2\sum_{t=n/2+1}^{n} x_t^2=(1-k_1)\left(\sum_{t=1}^{n/2} x_t^2-\sum_{t=n/2+1}^{n} x_t^2\right)$$

Otrzymane wyrażenie będzie równe 0, jeżeli

$$\sum_{t=1}^{n/2} x_t^2 = \sum_{t=n/2+1}^{n} x_t^2$$

co jest równoznaczne z równością wariancji zmiennej objaśniającej dla obydwu równolicznych grup danych. Aby więc estymatory (7), (8), (9) modelu (1) przy założeniach h), i), j) były *quasi*-nieobciążone, wariancje zmiennej objaśniającej w obydwu grupach danych powinny być sobie równe.

Nakładając każdorazowo ostre założenia modelu heteroscedastyczności, można w pewnych przypadkach sformułować dość proste warunki *quasi*-nieobciążoności klasycznych estymatorów wariancji składnika losowego oraz wariancji oszacowań parametrów strukturalnych modelu (1). Warunki te dotyczą kształtowania się zmiennej objaśniającej i są różne dla różnych typów heteroscedastyczności. Wiąże się to z tym, że wprowadzone

w artykule pojęcie *quasi*-nieobciążoności polega na otrzymywaniu obciążenia zerowego przy pewnych układach wartości zmiennej objaśniającej. Jeśli ta jest zmienną ekonomiczną, układy te mogą być trudne do otrzymania.

Należy zauważyć, że dla modelu tendencji rozwojowej postaci

$$y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t \qquad (t = 1,2,...,n)$$

i w przypadku niejednorodności wariancji typu g) lub j) klasyczna metoda najmniejszych kwadratów daje zawsze *quasi*-nieobciążone estymatory wariancji składnika losowego oraz oszacowań parametrów strukturalnych. Zmienna czasowa spełnia bowiem obydwa znalezione przez nas warunki tak dla przypadku g) jak i dla j).

BIBLIOGRAFIA

[1] Goldberger A.: *Teoria ekonometrii* PWE, Warszawa 1972.

[2] Pawłowski Z.: *Modele ekonometryczne a regresja pierwszego i drugiego rodzaju*, „Przegląd Statystyczny", 1962, nr 2.

[3] Malinvaud E.: *Statistical Methods of Econometrics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1966.

[4] Park E.: *Estimation with Heteroscedastic Error Terms*, „Econometrica", 34, 1966, nr 4.

РЕЗЮМЕ

Статья посвящена стохастическим последствиям неоднородности дисперсии случайного компонента с одной объясняющей величиной. Принятым методом оценки является классический метод наименьших квадратов. Для определения несмещенности оценок структуральных параметров при некоторых системах значения объясняющей переменной было введено понятие квазинесмещенности. Последняя часть работы посвящена установлению условий появления этого явления для определенных случаев гетероскедастичности.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Artikel befasst sich mit den stochastischen Folgen der Varianzungleichartigkeit des Schicksalselements des ökonometrischen Modells mit einer deutender Variabel. Die angenommene Methode der Ästimation ist die klassische Methode der kleinsten Quadrate. In der Arbeit wurde der Begriff von *quasi*-Unbelastetheit der Ästimatoren der Strukturparameter bei gewissen Wertverhältnissen von der deutender Variabel. Der letzte Teil befasst sich mit der Bestimmung von Bestehensbedingungen dieser Erscheinung für die bestimmten Fälle der Heteroszedastizität.